11 класс

Задача 1. Растяжение пружины

Если жёсткость всей пружины длиной l равна k, то период продольных колебаний грузика можно найти по формуле:

$$T_{\parallel}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{4k},$$

где m — масса грузика.

Уравнение движения грузика в поперечном направлении имеет вид:

$$m\varphi'' \frac{l}{2} = -2F_{\text{упр}}\,\varphi = -2k\Delta l\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi'' + \frac{4k\Delta l}{ml}\varphi = 0.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_{\perp}^2 = (4k\Delta l)/(ml)$, их период:

$$T_{\perp}^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{4k\Delta l} = 4\pi^2 \frac{m}{4k}\left(1 + \frac{l_0}{\Delta l}\right).$$

Отношение периодов:

$$\frac{T_{\perp}^2}{T_{\parallel}^2} = n^2 = 1 + \frac{l_0}{\Delta l}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Поскольку $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1$:

$$\frac{\Delta x}{l_0} = \frac{1}{n_2^2 - 1} - \frac{1}{n_1^2 - 1} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)},$$

откуда

$$l_0 = \frac{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)}{n_1^2 - n_2^2}\Delta x = 60 \text{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{l_0}{n_1^2 - 1} = 4 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{l_0}{n_2^2 - 1} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Задача 2. Наноплавление

Уменьшение температуры плавления для нанобъектов связано с увеличением (при уменьшении объёма) доли приповерхностных атомов, обладающих избыточной энергией ΔU по сравнению с объёмными атомами. Для образцов различной формы эти доли оказываются разными. Для шариков доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ:

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{4\pi R^2 \delta}{4\pi R^3/3} = 3\delta/R = 6\delta/d.$$

Оценим толщину приповерхностного слоя. Объём, приходящийся на один атом олова равен:

$$v = \frac{1}{\rho}\frac{\mu}{N_A},$$

а следовательно характерное межатомное расстояние $a = \sqrt[3]{v} \approx 1{,}86$нм. Приповерхностный слой в таком случае имеет размеры порядка 4-6 нм, что существенно меньше 20 нм.

Теплота плавления уменьшается на величину избыточной энергии всех приповерхностных атомов:

$$\Delta q_0 = \Delta U \Delta N = (\Delta U N)\, 6\delta/d.$$

Новая теплота плавления:

$$q = q_0 - \Delta q_0 = q_0 - (\Delta U N)\, 6\delta/d.$$

В пересчёте на атом:

$$q/N = q_0/N - \Delta U(6\delta/d).$$

Учитывая, что $q/N = \alpha T_d$ и $q_0/N = \alpha T_0$ (α – коэффициент пропорциональности), получаем относительное понижение температуры плавления наношарика по сравнению с массивным образцом:

$$\Delta T_d/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0}\frac{6\delta}{d}.$$

Доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ фольги площадью S:

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{2S\delta}{Sh} = 2\delta/h = 2\delta/d.$$

Соответственно, относительное понижение температуры плавления фольги:

$$\Delta T_h/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0}\frac{2\delta}{d} = \Delta T_d/\Delta T_h = 3.$$

Это соотношение хорошо подтверждается экспериментально:

$$\Delta T_h = 1/3\,\Delta T_d \approx 8{,}30\,^\circ\mathrm{C} \to t_h = t_0 - \Delta T_h \approx 223{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

Задача 3. Восьмёрка лорда Кельвина

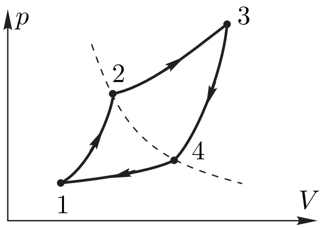

Рис. 23

Качественно изобразим процесс на графике в привычных (p, V) координатах (рис. 23). График состоит из четырёх политроп: процессу ab соответствует процесс 12, ef — 23, cb — 34, ed — 41. Также важно отметить, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме ($T_2 = T_4 = T_b$).

1. Поскольку теплота, переданная газу в процессе с постоянной теплоёмкостью, равна $Q = C\Delta T$, то в координатах CT теплота процесса численно равна площади под графиком. Из графика видно, что на участке 12 и 23 тепло подводится, а на участках 34 и 41 — отводится. Полная подведённая теплота $Q+$ и отданная теплота Q_-:

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23} = C_a(T_2 - T_1) + C_d(T_3 - T_2) = 271{,}5 \text{ Дж}.$$
$$Q_- = Q_{34} + Q_{41} = -C_a(T_3 - T_2) - C_d(T_2 - T_1) = -243 \text{ Дж}.$$

По первому началу термодинамики полная теплота в цикле равна работе, совершённой газом:

$$A = Q_+ + Q_- = 28{,}5 \text{ Дж}, \qquad \text{тогда} \qquad \eta = \frac{A}{Q_+} = 0{,}105.$$

2. Из уравнения политропы и уравнения состояния идеального газа $pV/T = $ $= \text{const}$ следует связь между T и V:

$$TV^{n-1} = \text{const}\,, \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-n}} = \frac{V}{V_0}. \tag{20}$$

Запишем (20) для четырёх процессов:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_1}{V_2}, \quad \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_2}{V_3}, \quad \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_3}{V_4}, \quad \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_4}{V_1}.$$

Перемножим все равенства:

$$\left(\frac{T_1T_3}{T_2T_4}\right)^{\frac{n_a-n_d}{(1-n_a)(1-n_d)}} = 1, \qquad \text{откуда} \qquad T_1T_3 = T_2T_4 = T_2^2. \tag{21}$$

Запишем (21), используя $T_2 = T_1 + T_0$ и $T_3 = T_1 + 3T_0$, где $T_0 = 100$ К:

$$T_1(T_1 + 3T_0) = (T_1 + T_0)^2, \qquad \text{откуда} \qquad T_1 = T_0.$$

Таким образом, получим $T_1 = 100$ К, $T_2 = 200$ К и $T_3 = 400$ К.

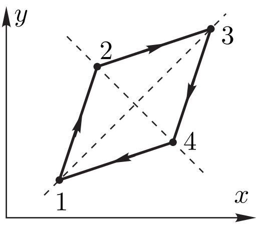

Рис. 24

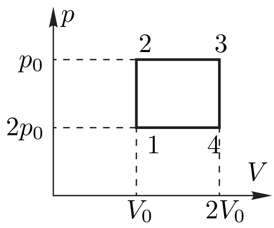

Рис. 25

3. Найдём связь между показателем политропы n и теплоёмкостью C. Дифференцируя (20), найдём связь между приращениями ΔV и ΔT:

$$V^{n-1}\Delta T + (n-1)TV^{n-2}\Delta V = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \Delta V = \frac{\Delta T}{1-n}\frac{V}{T}.$$

Запишем первый закон термодинамики:

$$\Delta Q = C\Delta T = \Delta U + A = \mathrm{C}_V\Delta T + p\Delta V = \mathrm{C}_V\Delta T + p\frac{\Delta T}{1-n}\frac{V}{T}$$

$$(C - C_V)\Delta T = \frac{\Delta T}{1-n}\frac{pV}{T} = \frac{\nu R\Delta T}{1-n}.$$

Таким образом,

$$n = 1 - \frac{\nu R}{C - C_V} = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Взяв логарифм от уравнения политропы, получим:

$$\ln\frac{p}{p_0} + n\ln\frac{V}{V_0} = \mathrm{const}\,,$$

откуда следует, что в координатах xy, где $x = \ln V/V_0$, а $y = \ln p/p_0$, график политропы представляет прямую с наклоном $-n$, следовательно, график всего цикла будет параллелограммом, у которого точки 2 и 4 лежат на прямой $x + y = \mathrm{const}$ (рис. 24). Из условия $p_1/p_3 = V_1/V_3$ находим, что точки 1 и 3 лежат на прямой $x - y = \mathrm{const}$. Таким образом, диагонали параллелограмма перпендикулярны следовательно, график цикла является ромбом. Поскольку диагональ 13 ромба является биссектрисой, то углы наклона политроп в сумме дают $90°$, откуда следует, что произведение угловых коэффициентов равна 1:

$$n_a n_d = \frac{C_p - C_a}{C_a - C_V}\cdot\frac{C_p - C_d}{C_d - C_V} = 1, \qquad \text{откуда} \qquad C_a + C_d = C_p + C_V = \nu(c_p + c_V),$$

где c_p и c_V — молярные теплоёмкости. Окончательно найдём:

$$\nu = \frac{C_a + C_d}{c_p + c_V} = 34{,}4 \text{ ммоль}.$$

Заметим, что $C_a = \nu c_v$, а $C_d = \nu c_p$, следовательно, цикл процесса состоит из двух изобра и двух изохор (рис. 25).

Задача 4. Электроудар

1. Период колебаний каждого из шариков $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2{,}0$ с.

2. Шарики считаем точечными зарядами. При отклонении проволок от вертикали на небольшой угол α ($\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$) в сторону сближения сила кулоновского притяжения $F_q = kq^2/(d–2\alpha l)^2$ уравновешивается равнодействующей сил тяжести и натяжения проволок $F_\text{р} = mg\alpha$:

$$k\frac{q^2}{(d–2\alpha l)^2} = mg\alpha \quad \to \quad k\frac{q^2}{mg} = \alpha(d–2\alpha l)^2 = f(\alpha).$$

Функция $f(\alpha) = \alpha(d–2\alpha l)^2$ имеет максимум при $\alpha_0 = d/(6l)$. Этому значению соответствует максимальное значение заряда шариков:

$$kq_\text{max}^2 = mg\alpha_0(d–2\alpha_0 l)^2 = \frac{2mgd^3}{27l} \quad \to \quad q_\text{max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}.$$

Для отклонения шариков на больший, чем α_0 угол, вплоть до столкновения, требуется меньший заряд, а значит, при сколь угодно незначительном превышении q_max шарики под действием Кулоновского взаимодействия достаточно быстро притянутся (за время не превышающее T) и взаимно разрядившись вновь разойдутся, пока вновь не приобретут необходимый для столкновения критический заряд q_max. Разность потенциалов между шариками при q_max равна минимальному значению напряжения источника, при котором шарики столкнутся:

$$U_\text{min} = \varphi_+ - \varphi_- = k\frac{q_\text{max}}{r} - (-k\frac{q_\text{max}}{r}) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64{,}6 \text{ кВ}.$$

3. Поскольку $U_\text{min} \ll U_0 = 1$ МВ, ток заряда можно считать постоянным $I = U_0/R$ и время заряда до значения q_max можно рассчитать по формуле:

$$\tau = \frac{q_\text{max}}{I} = \frac{U_\text{min} r}{2k}\frac{R}{U_0} = 18 \text{ с}.$$

Задача 5. В архиве Снеллиуса

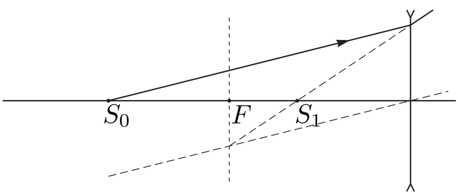

Рис. 26

Для начала проведём качественный анализ того, где может располагаться линза и какой она может быть.

Рассеивающая линза. Изображение в рассеивающей линзе всегда мнимое и лежит по ту же сторону от линзы, что и источник, причем расстояние от линзы до изображения меньше расстояния от линзы до источника. Таким образом, условию удовлетворяет рассеивающая линза, которая находится правее S_1 (рис. 26).

Собирающая линза. Изображение может быть как мнимым, так и действительным. Мнимое (причем, увеличенное) изображение расположено от линзы всегда дальше чем источник, поэтому линза, дающая мнимое изображение, расположена слева от S_0 (рис. 27).

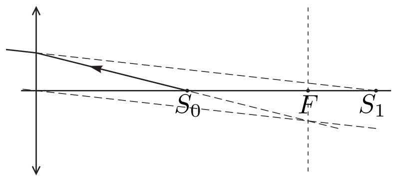

Рис. 27

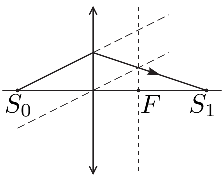

Рис. 28

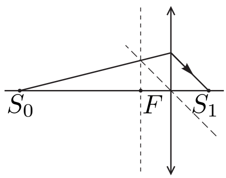

Рис. 29

Если линза расположена между источником S_0 и изображением S_1, то изображение — действительное. Так как линза имеет два фокуса, то точка F может лежать как справа (рис. 28), так и слева от линзы (рис. 29).

Таким образом, существуют четыре решения!

Теперь найдём точные координаты оптических центров этих линз и выполним построения. Пусть расстояние от источника света до фокуса равно d, до изображения — L, а до линзы — x. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{|x|} \pm \frac{1}{|L-x|} = \pm \frac{1}{|d-x|}, \tag{22}$$

где знак плюс в левой части соответствует действительному изображению, а минус — мнимому. В то время как знак плюс перед оптической силой линзы соответствует собирающей линзе, а знак минус — рассеивающей.

Данные в задаче точки S_0, F и S_1 делят оптическую ось на четыре промежутка, в каждом из которых модули в уравнении (22) будут раскрываться с различными знаками.

Найдём все решения уравнения (22). Раскроем знаки на промежутке S_0F. Как мы заметили выше, здесь может располагаться только собирающая линза, тогда:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} = \frac{1}{d-x},$$

$$x^2 - 2Lx + Ld = 0 \to L - x = \mp\sqrt{L(L-d)},$$

причем решение со знаком минус попадает в рассматриваемый нами промежуток.

Решая по аналогии уравнение (22) на оставшихся трёх промежутках, найдём, что ещё две собирающих линзы находятся в точках $x = \pm\sqrt{Ld}$, а в точке $L - x = \sqrt{L(L-d)}$ находится рассеивающая линза.

Все построения в данной задаче сводятся к построению корней из произведений длин отрезков. В курсе геометрии доказывается, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Таким образом, найдём $\sqrt{S_0S_1 \cdot FS_1}$ и $\sqrt{S_0S_1 \cdot S_0F}$ и отложим полученные отрезки от точки S_0 вправо и от точки S_1 в обе стороны, соответственно.

Пошаговая инструкция к построению (рис. 30):

1. Отложим на оптической оси отрезок длины $S_0S_1 = L$ вправо от точки S_1. Обозначим точку M_1.
2. Найдём среднее геометрическое от длин $FS_1 = L - d$ и L. Для этого построим окружность на диаметре FM_1. Найдём точку пересечения перпендикуляра к оптической оси, проходящего через S_1 и окружности — P_1. Длина отрезка S_1P_1 равна $\sqrt{L(L-d)}$.
3. Отложим отрезки длины S_1P_1 влево (O_1) и вправо (O_2) от S_1 на оптической оси. Левая линза окажется собирающей, а правая — рассеивающей.
4. Отложим на оптической оси отрезок длины $S_0S_1 = L$ влево от точки S_0. Обозначим точку M_0.
5. По аналогии с пунктом 2 построим окружность на диаметре M_0F и перпендикуляр S_0P_0, длина которого равна $\sqrt{Ld}$.
6. Отложим отрезки длиной S_0P_0 вправо (O_3) и влево (O_4) от точки S_0 на оптической оси. Эти линзы являются собирающими.

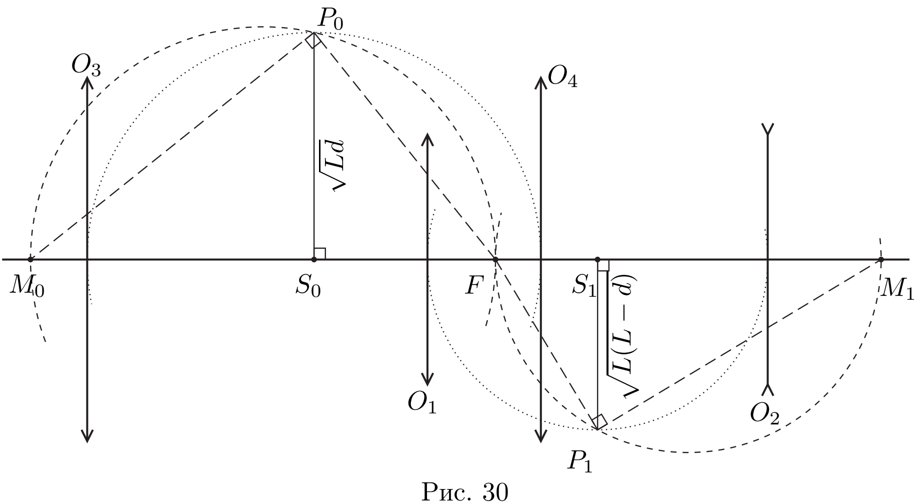

Рис. 30